## **基础课55 二项式定理**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 考点考向 | 课标要求 | 真题印证 | 考频热度 | 核心素养 |
| 二项式定理 | 掌握 | 2023年北京卷  2023年天津卷  2022年新高考Ⅰ卷 | ★★★ | 逻辑推理数学运算 |
| 二项式系数的性质 | 理解 | 2022年浙江卷 | ★★☆ | 逻辑推理数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，选择题、填空题都出现过，属于基础题，命题热点是以展开式通项公式为载体求相关项的系数.预计2025年高考命题情况变化不大，应重视基础，夯实一轮复习 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

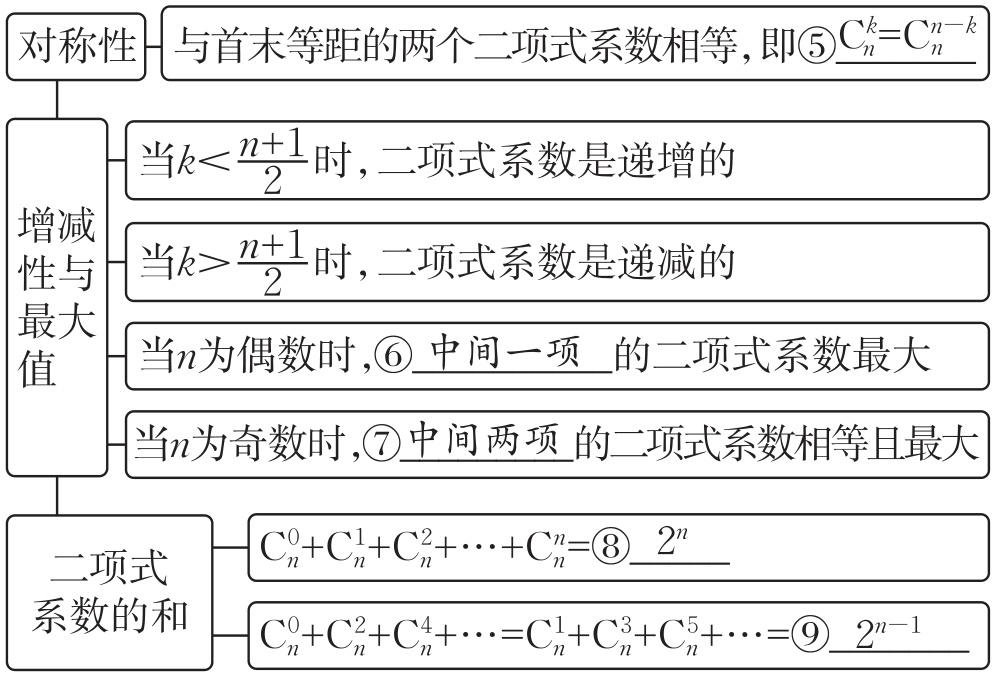
##### **一、二项式定理**

|  |  |
| --- | --- |
| 二项式定理 |  |
| 通项公式 | ，它表示第③项 |
| 二项式系数 | 二项展开式中各项的二项式系数分别为④ |

【提醒】1.项数为;

2.各项的次数都等于，即和的指数的和为.

##### **二、二项式系数的性质**



#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 是二项展开式的第项.( × )

（2） 在二项展开式中，系数最大的项为中间一项或中间两项.( × )

（3） 的展开式中某一项的二项式系数与，无关.( √ )

（4） 的展开式中某项的系数是该项中非字母因数部分，包括符号等，与该项的二项式系数不同.( √ )

2. （易错题）已知为常数的展开式的二项式系数之和为32，常数项为80，则的值为( C ).

A. 1 B. C. 2 D.

【**易错点**】本题容易混淆“项的系数”与“二项式系数”.

[解析]根据题意，该二项式的展开式的二项式系数之和为32，则有，可得，则二项式的展开式通项为，令，得，则其常数项为，根据题意，有，可得.故选.

##### **题组2 走进教材**

3. （双空题）（人教A版选修改编）的展开式的第4项为；的展开式的中间一项为924.

[解析]因为的展开式的第项为，所以的展开式的第项为，展开式共有13项,其中间一项为第7项，当时，.

4. （人教A版选修改编）能（填“能”或“不能”）被整除.

[解析],上式中的每一项都可以被整除，故能被整除.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·天津卷]在的展开式中，项的系数为60.

[解析]展开式的通项公式为，令可得，，则项的系数为.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 二项展开式的特定项或特定系数［自主练透］**

1. [2023·北京卷]在的展开式中，的系数为( D ).

A. B. C. 40 D. 80

[解析]的展开式的通项公式为，

令，得,所以的展开式中的系数为.

故选.

2. [2022·新高考Ⅰ卷]的展开式中的系数为.（用数字作答）

[解析]因为，

所以的展开式中含的项为，故的展开式中的系数为.

3. 在的展开式中，的系数为30.

[解析]表示5个因式的乘积，在这5个因式中，有2个因式选,其余的3个因式中有一个选,剩下的2个因式选,即可得到含的项，故含的项的系数是.

4. （改编）若的展开式的第6项为常数，则展开式中所有有理项的个数为3.

[解析]根据题意，可得的展开式的通项公式为，

由第6项为常数项，得当时，，解得.

因此，若为有理项，则，且，1,2,3, ,10，分析可得当,5,8时，，则展开式中所有有理项的个数为3.

5. [2024·济南模拟]在的展开式中，含项的二项式系数为56.

[解析]在的展开式中含项的二项式系数为.



**求解二项展开式中的特定项或特定项系数问题的三个步骤**

第一步，利用二项式定理写出二项展开式的通项公式且，把字母和系数分离（注意符号不要出错）；

第二步，根据题目中的相关条件（如：常数项要求指数为0，有理项要求指数为整数）列出相应方程（组）或不等式（组），解出；

第三步，把代入通项公式中，即可求出.

【注意】

1.对于三项式问题，一般先变形化为二项式再解决，或利用展开式的原理求解;

2.对于几个多项式积的展开式中的特定项问题，一般都可以根据因式连乘的规律，结合组合思想求解，但要注意适当地运用分类方法，以免重复或遗漏，也可以利用排列组合的知识求解；

3.对于几个多项式和的展开式中的特定项（系数）问题，先分别求每一个多项式中的特定项，再合并，有时还要用方程或不等式的知识求解.

#### **考点二 二项式系数的性质与各项系数的和［多维探究］**

##### **二项式系数的和角度1**

典例1（1） （多选题）若，则下列结论正确的是( ABD ).

A.

B.

C.

D.

[解析]令，可得， ①

令，可得， ②

令，可得. ③

由，可得，

构建函数,

则,

令,得，

所以.

令，可得，

所以.故选.

（2） （双空题）已知的展开式的二项式系数之和为64，则展开式中第5项的二项式系数是15，展开式中含的项的系数是1215.

[解析]因为的展开式的二项式系数之和为64，所以，解得.

由的展开式的通项公式为，令，得展开式中第5项的二项式系数为,再令，解得，则展开式中含的项的系数为.



**赋值法求系数和的应用技巧**

1.“赋值法”普遍适用于恒等式，对形如,的式子，求其展开式的各项系数之和，常用赋值法，只需令；对形如的式子，求其展开式的各项系数之和，只需令.

2.一般地，若，则的展开式中各项系数之和为.

奇数项系数之和为，偶数项系数之和为.

##### **二项式系数的最值问题角度2**

典例2 [2024·济南模拟]若二项式的展开式中只有第11项的二项式系数最大，则展开式中的指数为整数的项的个数为( D ).

A. 3 B. 5 C. 6 D. 7

[解析]根据的展开式中只有第11项的二项式系数最大，得，

的展开式的通项公式为，要使的指数是整数，需是3的倍数，，3，6，9，12，15，18，的指数是整数的项共有7项.故选.



**二项式系数最大项的确定方法**

当为偶数时，展开式中第项的二项式系数最大，最大值为；当为奇数时，展开式中第项和第项的二项式系数最大，最大值为与.

##### **项的系数的最值问题角度3**

典例3 [2024·南京模拟]（双空题）已知的展开式的二项式系数和比的展开式的二项式系数和大992，则在的展开式中，二项式系数最大的项为，系数的绝对值最大的项为.

[解析]由题意知，，即，故，解得.由二项式系数的性质知，的展开式中第6项的二项式系数最大，故二项式系数最大的项为.

设第项的系数的绝对值最大，

则，

令

得即解得.

，.

系数的绝对值最大的项是第4项，即.



**求展开式中系数最大的项**

如求的展开式中系数最大的项，一般采用待定系数法，设展开式各项系数分别为,, ,，且第项系数最大，应用从而解出的值即可.

##### **多维训练**

1. [2024·梅州模拟]（多选题）下列关于的说法正确的是( AC ).

A. 展开式中的二项式系数之和为2048

B. 展开式中只有第6项的二项式系数最大

C. 展开式中第6项和第7项的二项式系数最大

D. 展开式中第6项的系数最大

[解析]的展开式中二项式系数之和为，所以正确；因为为奇数，所以展开式中有12项，中间两项（第6项和第7项）的二项式系数相等且最大，所以不正确，正确；因为的展开式的通项公式为，

所以当为偶数时，第项的系数为正值，当为奇数时，第项的系数为负值，令，解得，所以展开式中第6项的系数为负值，显然不可能最大，所以不正确.故选.

2. 在的展开式中，的所有奇数次幂项的系数之和为20，则.

[解析]设,

令得， ①

令得， ②

两式相减得，

因为的所有奇数次幂项的系数之和为20，

所以，解得.

3. 已知的展开式中各项系数之和为64，则该展开式中系数最大的项为.

[解析]令，则的展开式中各项系数之和为，则，

由的展开式的通项公式为知二项展开式的系数最大项在奇数项，

设二项展开式中第项的系数最大，

则

化简可得

经验证可得，

则该展开式中系数最大的项为.